

Математическая экономика, раздел [математики](#), выполняющий роль связующего звена между [экономической](#) теорией и классической математикой. Её основное назначение – анализ средствами математики теоретических построений в области экономики на непротиворечивость и генерация новых экономических идей на основе [математических моделей](#). Математически [формализуются](#) такие ключевые экономические понятия, как [спрос](#), [предложение](#), [рынок](#), [прибыль](#), [эффективность](#), [монополия](#) и др. По мере развития [информационных технологий](#) роль знаний в экономике возрастает, математические конструкции дают опору экономической интуиции.

Место математической экономики среди других научных дисциплин

Содержанию термина «математическая экономика» наиболее точно соответствуют стандарты «Журнала математической экономики» ([Journal of Mathematical Economics](#)), согласно которым формальное математическое выражение экономических идей имеет жизненно важное значение для экономики, позволяя определить наличие связного [логического](#) смысла в работах экономистов. Формальное развитие экономических идей применительно к задачам с реальным экономическим содержанием может породить новые экономические идеи и концепции. Математическая экономика не предполагает, что полученные результаты обязательно применяются на практике, и в этом её отличие от математических методов в экономике. Математическая техника и наличие доказанных [теорем](#) ценится здесь выше, чем содержательное наполнение данными или практическое применение (не к теории).

Основу математической экономики в её современном виде составляют математические теории экономической динамики и равновесия с набором теорем существования и обоснования числа (не обязательно единственности) решений, их оптимальности и других ключевых свойств. По разнообразию и уровню сложности применяемого математического аппарата они относятся к чистой математике, но сохраняют экономическую лексику, унаследованную от ранних работ.

Принято считать, что математическая экономика как отдельная наука началась с работ [Л. Вальраса](#), чётко определившего понятие рыночного [равновесия](#), и [В. Парето](#), который ввёл понятие оптимального состояния, ныне называемого Парето-оптимальным состоянием. Сюда же можно отнести труды [Ф. Кенэ](#) с его моделью [сельскохозяйственной](#) экономики и сочинение [Т. Р. Мальтуса](#) «Опыт о законе народонаселения...» (1798). Все перечисленные математические конструкции были достаточно просты и не сопровождались доказательством теорем, поэтому их трудно считать математическими в современном понимании.

Математическая экономика как полноценная математическая дисциплина с доказательством теорем и получением следствий из них начинается с [микроэкономических](#) работ [К. Дж. Эрроу](#) и [Дж. Дебрё](#) о [конкурентном](#) равновесии, [макроэкономических](#) работ [Дж. фон Неймана](#) о моделях [экономического роста](#), однопродуктовой модели экономики с бесконечным временным интервалом, предложенной в 1920-е гг. английским математиком Ф. Рамсеем. В модели равновесия Эрроу – Дебрё получили завершённую форму высказанные Вальрасом и Парето идеи о конкуренции, о существовании равновесных [цен](#) и об оптимальности соответствующего им [распределения продуктов](#). Теорема о существовании равновесия была доказана с применением теоремы о неподвижной точке. Позднее Дебрё удалось показать конечность числа равновесных состояний для почти всех начальных параметров модели, используя теорему Сарда из теории [меры](#). В дальнейшем эта тема развивалась [С. Смейлом](#), обогатилась применением дифференциальной [топологии](#), теории особенностей, но не практическими применениями, хотя эта тема тоже обсуждалась.

В 1937 г. Дж. фон Нейман предложил модель расширяющейся экономики, ввёл понятие магистрали и доказал её существование. Это означает, что [оптимальная траектория](#) с началом в любой точке обязательно будет приближаться к траектории самого быстрого роста (магистрали), а в пределе выйдет на неё. Нейман в совместной с [О. Моргенштерном](#) монографии «Теория игр и

экономическое поведение» (1944) заложил основы [теории игр](#) как математического языка для описания экономики. Со временем связь теории игр и теории конкурентного равновесия стала более тесной.

В те же годы возросло число работ, где математические модели экономики использовались для практических целей. Наибольшую популярность получила разработанная в 1930-е гг. модель Леонтьева, связанная с [межотраслевым балансом](#). Баланс составляется [статистическими](#) органами многих стран как основа для различных расчётов, в них стали доминировать методы [эконометрики](#), которые обычно не относят к математической экономике. [В. В. Леонтьев](#) считал осмысленными лишь те экономические [модели](#), которые можно наполнить реальной информацией. Вместе с тем появились работы (Шананин. 2021^[1]), существенно расширяющие и прикладные возможности межотраслевого баланса, и вклад в теорию.

Изучение динамики сложноструктурированных экономических систем с взаимной зависимостью было начато в моделях Неймана и Леонтьева, в которых экономика характеризуется сложными связями [производства промежуточных товаров](#). В нашей стране такого рода модели интенсивно исследовались научными школами [В. Л. Макарова](#) – А. М. Рубинова и [А. А. Петрова](#) – И. Г. Поспелова.

Математическая экономика – наиболее сложная часть экономической теории, она наполнена сложными математическими средствами, что сужает её доступность для понимания выпускниками экономических факультетов, экономистами-теоретиками и управленцами.

Научные статьи по математической экономике публикуются в Journal of Mathematical Economics, в журналах ««Экономика и математические методы», «Математическое моделирование», [«Цифровая экономика»](#), в [«Докладах Российской академии наук»](#), [«Вестнике РАН»](#), в математических журналах общего профиля.

Вклад отечественных авторов в развитие математической экономики

Отечественные математики, решая конкретные экономические задачи, а затем обобщая полученные решения, внесли заметный вклад в развитие математической экономики. Наличие в СССР [плановой экономики](#) и высокий уровень развития математической науки объективно способствовали этому. Сложилось несколько научных школ, ориентированных на применение математики к решению экономических задач: в Ленинграде возникла школа вокруг [Л. В. Канторовича](#) (часть учёных вместе с ним затем переехали в Новосибирск, часть осталась в Ленинграде); в Москве научная школа образовалась вокруг А. А. Дородницына; в Киеве – вокруг В. М. Глушкова. У каждой из научных школ были свои достижения в решении конкретных задач, однако [теория экономического равновесия](#) тогда считалась буржуазной наукой и заниматься экономической теорией было опасно с идеологической точки зрения.

В 1939 г. Л. В. Канторович сформулировал задачу [линейного программирования](#) и предложил метод её решения. Впоследствии идея оптимальности и оптимального плана стала математическим основанием теории экономики благосостояния, а также плановой экономики [социализма](#). Параллельно с решением прямой задачи о нахождении [оптимума](#) метод Канторовича предусматривал определение двойственных переменных, названных автором «объективно обусловленные оценки» (Канторович. 1959^[2]). Речь шла об оптимальных ценах на ресурсы, которые имеются в ограниченном количестве. В дальнейшем идея двойственности как основы теории цен была развита Канторовичем и его учениками применительно к широкому кругу вопросов [ценообразования](#), включая теорию [ренды](#), цены на публичные блага, поставляемые в частном порядке, [тарифы](#) на [услуги](#).

Ещё одна фундаментальная идея Канторовича – роль [отношений порядка](#) в экономике – состоит в том, что [технологии](#), [информация](#) и [знания](#) могут использоваться в меньшем или большем объёме, но в целом их не может быть больше или меньше.

На основе этой идеи В. Л. Макаров в 1973 г. построил математическую модель баланса, где вместо сложения использовалась операция максимума. Близкие идеи рассматривались в ещё более абстрактном виде Н. Н. Воробьёвым (1925–1995).

Позже [В. П. Масловым](#) и его последователями была построена полноценная математика, получившая название [идемпотентного](#) анализа, или тропической математики; в ней вместо операции сложения могли использоваться различные бинарные операции, включая операции максимума и минимума. Это послужило импульсом развитию моделей экономики с общественными благами, поставляемыми в частном порядке, позволило обобщить теорию общественных благ [П. Сэмюэлсона](#) (1954). Как и в случае с ценами на ограниченные ресурсы, математика шла впереди экономической мысли. В серии работ В. И. Данилова (род. 1943) с соавторами идея представления знаний целочисленными переменными постепенно трансформировалась в обобщение понятия [выпуклости](#) для дискретных множеств и привела к обобщению формального представления спроса в моделях рыночного равновесия. Были доказаны теоремы существования и оптимальности. Аналогичные результаты были позже получены на основе тропической математики английскими исследователями.

Ещё одна идея В. П. Маслова (2006) о том, что экономика как [квантовая система](#) находится сразу в двух состояниях, в одном из которых сложение обычное, т. е. $1 + 1 = 2$, в другом – идемпотентное, т. е. $1 + 1 = 1$, оказалась столь радикальной, что экономическая наука в целом так и не смогла её усвоить. Исключение составили квантовые финансы – ответвление теории [финансов](#), получившее применение на практике.

В работах представителей новосибирской школы получила развитие теория о соотношении конкурентного равновесия и игровых решений, прежде всего, ядра экономики. Ещё в 1960-е гг. [Р. Оман](#) показал, что ядро экономики – множество состояний, которые не могут быть заблокированы ни одной коалицией с выгодой для всех её участников – совпадает с множеством рыночных равновесий экономической системы с бесконечным числом [экономических агентов](#). Для экономической системы с конечным числом экономических агентов В. М. Маракулин (род. 1956) и В. А. Васильев (род. 1946) развили два варианта [теории договоров](#), где бесконечным является не число агентов, а число возможностей перезаключения [договоров](#).

Из работ научной школы А. А. Дородницына, которая была связана с оборонным сектором, к математической экономике можно отнести обобщения модели межотраслевого баланса с учётом частичной заменимости продуктов А. А. Шананина (род. 1955). Научная школа В. М. Глушкова ориентирована не на развитие экономической теории, а на применение [вычислительной техники](#) и относительно простых математических моделей, которые можно наполнить реальной экономической информацией.

Цифровая трансформация и математическая экономика

[Цифровая трансформация](#) экономики и возросшая роль знаний привели к заметному смещению акцентов не только в понимании того, что является главным и ценным в экономике целиком, но и в применении математики в экономике. Формализованные и представленные в цифровом формате знания подчиняются правилам идемпотентного сложения уже без каких-либо оговорок. Всё бóльшую роль играют [сетевые эффекты](#) (как положительные, так и отрицательные). Радикально расширились возможности применения вычислительной техники и аналитических инструментов на основе новых информационных технологий.

Усложнение математических моделей с целью их приближения к реальности приводит ко всё большим трудностям в получении математических результатов аналитическими методами. В связи

с этим повышается интерес к [компьютерным моделям, имитирующим реальность](#). Здесь математический результат уступает место компьютерным экспериментам, при этом место теорем занимают обработка и интерпретация численных расчётов. Появляются сервисы, позволяющие производить расчёты и эксперименты, получать и наглядно представлять полученные результаты в виде рисунков, диаграмм и графиков, например сервис [Wolfram Mathematica: Современные технические вычисления](#), который позволяет работать с моделями экономики, составляя конкуренцию традиционным применениям математики, включая математическую экономику. Яркий пример – агент-ориентированное моделирование, которое касается не только экономики, но также смежных областей науки и быстро расширяет сферу применения.

Примечания

1. [↑](#) Шананин А. А. Задача агрегирования межотраслевого баланса и двойственность / А. А. Шананин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61, № 1. – С. 162–176.
2. [↑](#) Канторович Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов / Л. В. Канторович ; Академия наук СССР, Отделение экономики, философии и права и Сибирское отделение АН СССР. – Москва : Издательство Академии наук СССР, 1959.

Литература

- Samuelson P. A. The pure theory of public expenditure // The Review of Economics and Statistics. – 1954. – Vol. 36, № 4. – P. 387–389.
- Tiebout C. M. A pure theory of local expenditures // The Journal of political economy. – 1956. – Vol. 64, № 5. – P. 416–424.
- Канторович Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. – Москва : Издательство Академии наук СССР, 1959.
- Debreu G. Theory of value : an axiomatic analysis of economic equilibrium. – New York : Wiley, 1959. – (Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University. Monograph ; 17).
- Нейман Д. фон. Теория игр и экономическое поведение / Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн ; пер. с англ. под ред. Н. Н. Воробьева. – Москва : Наука, 1970. – (Теория игр).
- Макаров В. Л. Баланс научных разработок и алгоритм его решения // Оптимизация : сборник статей. – Новосибирск : Институт математики, 1973. – Вып. 11 (28). – С. 37–45.
- Макаров В. Л. Исчисление институтов // Экономика и математические методы. – 2003. – Т. 39, № 2.
- Макаров В. Л. Агент-ориентированное моделирование для сложного мира / В. Л. Макаров, А. Р. Бахтизин, Дж. М. Эпштейн. – Москва : МАКС Пресс, 2022.
- Danilov V. Discrete convexity and equilibria in economies with indivisible goods and money / V. Danilov, G. Koshevoy, K. Murota // Mathematical Social Sciences. – 2001. – Vol. 41, № 3. – P. 251–273.
- Петров А. А. Об экономике языком математики. – Москва : ФАЗИС : ВЦ РАН, 2003. – (Математическое моделирование ; вып. 5).
- Пospelов И. Г. Моделирование экономических структур. – Москва : ФАЗИС, 2003. – (Математическое моделирование ; вып. 6).
- Маслов В. П. Квантовая экономика. – Изд. 2-е, доп. – Москва : Наука, 2006.
- Козырев А. Н. Моделирование НТП, упорядоченность и цифровая экономика // Экономика и математические методы. – 2011. – Т. 47, № 4. – С. 131–142.
- Маракулин В. М. О договорном подходе в моделях экономики типа Эрроу–Дебре–Маккензи // Экономика и математические методы. – 2014. – Т. 50, № 1. – С. 61–79.
- Tropical and idempotent mathematics and applications : International Workshop on Tropical and Idempotent Mathematics, August 26–31, 2012, Independent University, Moscow, Russia / ed. by G. L. Litvinov, S. N. Sergeev. – Providence, RI : American Mathematical Society, 2014. – (Contemporary mathematics ; 616).

- Васильев В. А. А-равновесие и нечеткое А-ядро в модели чистого обмена с экстерналиями // Математическая теория игр и её приложения. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 15–31.
- Шананин А. А. Задача агрегирования межотраслевого баланса и двойственность // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61, № 1. – С. 162–176.